РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Журнал основан
в январе 1966 года
Выходит 6 раз в год
Москва • «Наука»

№ 2

март — апрель • 1994

РЕДКОЛЛЕГИЯ:

И. Ф. Образцов (гл. редактор),
В. В. Васильев (зам. главного редактора),
Д. М. Климов (зам. главного редактора),
А. Г. Горшков (отв. секретарь редколлегии),
Н. В. Баничук, В. А. Бабешко, Г. А. Ванин, И. И. Ворович, Р. Ф. Ганиев,
А. Б. Ефимов, В. Ф. Журавлев, А. Ю. Ишлинский, В. Д. Клюшников, В. Н. Кукуджанов,
В. П. Майборода, Л. В. Никитин, И. В. Новожилов, В. А. Пальмов,
Б. Е. Победря, С. А. Шестериков, Ф. Н. Шклярчук, К. Ф. Черных

СОДЕРЖАНИЕ

К семидесятилетию Э. И. Григолюка 3
Григолюк Э. И., Коган Е. А., Мамай В. И. Проблемы деформирования тонкостенных слоистых конструкций с расслоениями 6
Куликов Г. М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек 33
Носатенко П. Я. Численное решение трехмерных задач неосесимметричной деформации слоистых анизотропных оболочек вращения 43
Толкачев В. М. Краевые эффекты в слоистых пластинах 52
Селезов И. Т. Гиперболические модели распространения волн в стержнях, пластинах и оболочках 64
Горшков А. Г., Дергачев А. А. Расчет пологой панели при действии импульсного электромагнитного излучения 78
Слабкий Л. И. Собственные колебания замкнутой круговой цилиндрической оболочки со свободными краями 82
Фильштинский В. А., Фильштинский Л. А. Импульсное граничное управление напряженным состоянием полуплоскости 87

© Российская академия наук
© Отделение проблем машиностроения, механики и процессов управления,
© Товарищество с ограниченной ответственностью «Журналы по механике», 1994 г.

9. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким заполнителем // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 5. С. 68—80.
10. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* К теории упругих слоистых анизотропных оболочек // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 5. С. 1077—1079.
11. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
12. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.
13. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
14. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М.: Наука, 1992. 336 с.
15. *Куликов Г. М.* Напряженно-деформированное состояние оболочек из слоистых композитов // ПМТФ. 1988. № 5. С. 157—162.

Тамбов

Поступила в редакцию
1.X.1993

МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1994

УДК 539.3

© 1994 г. П. Я. НОСАТЕНКО

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

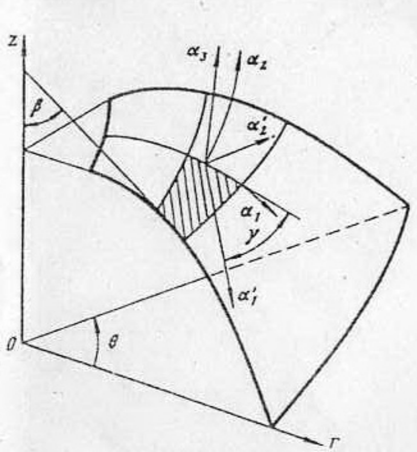
Композитные пластины и оболочки при произвольной ориентации макроскопически ортотропных слоев в пакете характеризуются существенной анизотропией и неоднородностью напряженно-деформированного состояния (НДС) при достаточно гладком нагружении. Впервые на основе решения задачи теории анизотропной упругости указанные эффекты были подробно исследованы в [1] на примере цилиндрического изгиба перекрестно армированной полосы. В последующем пространственный подход был успешно применен для решения двумерных задач осесимметричной деформации анизотропных оболочек вращения в линейной [2—4] и геометрически нелинейной постановках [5—7], а также обобщенной плоской геометрически нелинейной деформации протяженных цилиндрических оболочек, панелей.[1] Основной результат, полученный в отмеченных работах, можно кратко сформулировать так: НДС слоистых композитных пластин и оболочек имеет пространственный характер, при котором пренебрежение поперечными компонентами напряжений и деформаций недопустимо.

В [1—5] данный результат связывался с толстостенностью пластин и оболочек. Однако в [6—8] установлено, что в случае композитов с ограниченным числом слоев, пространственный характер НДС свойственен и весьма тонкостенным элементом конструкций. Из асимптотического анализа напряженного состояния слоистых оболочек [9] следует, что понятие тонкостенность не является только геометрическим, но в значительной мере связано с отношениями тангенциальных и поперечных жесткостей, а также с изменяемостью НДС (связь пространственного характера НДС с изменяемостью нагрузок численно показана в [12] на основе решения трехмерных задач для ортотропных цилиндрических и сферических оболочек).

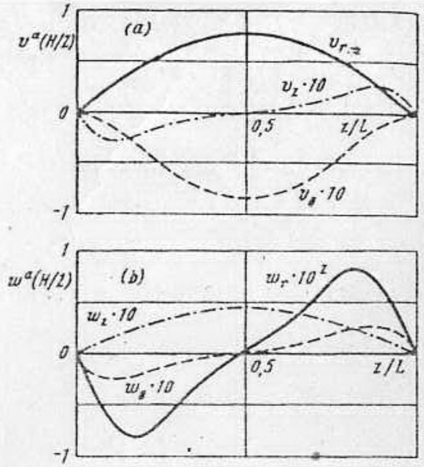
Неудовлетворенность результатами расчетов композитных конструкций на основе теорий оболочек и пластин первых приближений вызвала активное развитие уточненных неклассических двумерных теорий [13]. Решение же трехмерных задач теории упругости для исследования напряженного состояния тонкостенных анизотропных пластин и оболочек подобного развития не получило. Долгое время применение пространственного подхода к расчету слоистых анизотропных тонкостенных конструкций сдерживалось двумя факторами: отсутствием достаточно мощной вычислительной техники и недостаточностью математического обоснования применимости численных методов для решения указанного класса задач. Создание в 80-х годах высокопроизводительных ЭВМ и эффективного системного математического обеспечения практически снимает первый фактор с рассмотрения. Проведенные исследования сходимости [14] и устойчивости [15] метода конечных элементов (МКЭ) при расчете тонкостенных композитных конструкций позволяют считать для этого метода разрешенной и вторую проблему (в том числе и для геометрически нелинейных задач [16]).

В публикуемой работе разработаны методика и универсальный алгоритм численного решения трехмерной задачи теории упругости для слоистых анизотропных оболочек вращения, обобщающие [6, 7] для линейной деформации на случай неосесимметричного нагружения, или известную работу [17] на случай анизотропии общего вида. Исследованы свойства НДС перекрестно армированных оболочек при их неосесимметричном деформировании с учетом анизотропии свойств слоев.

[1] *Носатенко П. Я., Ширшов Ю. Ю.* Численное исследование пространственного геометрически нелинейного напряженно-деформированного состояния слоистых анизотропных оболочек // 22 Всесоюзное научное совещание по проблемам прочности двигателей. Тез. докл. М. 1988. С. 139—141; *Носатенко П. Я.* Реализация МКЭ при пространственном геометрически нелинейном расчете слоистых анизотропных оболочек // Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела. Тез. докл. Ч. 2. Харьков. 1989. С. 56—58.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. Постановка задачи. В цилиндрических координатах r, θ, z рассматривается оболочка вращения, ограниченная поверхностью S и имеющая объем V, собранная из ортотропных в исходной системе координат α_1', α_2', α_3 слоев таким образом, чтобы соблюдалась осевая симметрия. В координатах α_1, α_2, α_3, связанных с линиями главных кривизн срединной поверхности слоя и повернутых вокруг α_3 относительно исходной системы на угол армирования $\gamma^{(k)}$, как показано на фиг. 1, каждый слой является анизотропным с одной плоскостью упругой симметрии (здесь и ниже индекс k означает принадлежность слою, отсчет слоев производится от внутренней поверхности). При переходе к цилиндрической системе координат, осуществленном поворотом осей α_1, α_2, α_3 на угол $\beta^k(r, z)$ вокруг α_2, первоначально ортотропный слой приобретает общие свойства цилиндрической анизотропии. Подобная упругая модель включает в себя оболочки и тела, выполненные как из пространственно армированных макроскопически ортотропных слоев [18], так и из однонаправленно армированных композитов, в координатах α_1', α_2', α_3 являющихся макроскопически трансверсально изотропными [19]. Оболочка на части поверхности S_p нагружена системой поверхностных сил P, подвергнута действию объемных нагрузок Q и нагрета относительно начального состояния на температуру T.

НДС будем характеризовать перемещениями $u(r, \theta, z) = [U_r, U_\theta, U_z]^T$, векторами линейных деформаций $\varepsilon(r, \theta, z) = [\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta}]^T$ и напряжений $\sigma(r, \theta, z) = [\sigma_{rr}, \ldots, \sigma_{r\theta}]^T$, составленными из компонентов соответствующих тензоров [20]. Считая температуру T известной и постоянной во времени, процесс деформирования рассматриваем как изотермический. Тогда напряжения не зависят от предыстории нагружения [21, 22] и определяющими являются соотношения Дюгамеля — Неймана для анизотропного тела

$$\sigma^{(k)} = B^{(k)}\varepsilon^{(k)} - T\beta^{(k)} \tag{1.1}$$

Здесь $B_{ij} = B_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 6)$ — матрица жесткости обобщенного закона Гука, β — вектор температурных напряжений при стесненных деформациях, равный $\beta = B\alpha$, где $\alpha = [\alpha_{rr}, \alpha_{\theta\theta}, \alpha_{zz}, \alpha_{\theta z}, \alpha_{rz}, \alpha_{r\theta}]^T$ — вектор температурных удлинений и сдвигов.

Для получения уравнений статического равновесия используем вариационный принцип минимума полной энергии

$$\delta\Pi = \delta\left[\int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon^T B\varepsilon - T\beta^T\varepsilon\right) dv - \int_V Q^T u dv - \int_{S_p} P^T u dS\right] = 0 \tag{1.2}$$

В (1.2) отсутствуют члены, вариация которых равна нулю, индекс k здесь и ниже опускаем, считая компоненты σ, ε, B и α функциями r и z, в общем случае разрывными на границах слоев.

Учитывая периодичность задачи по θ, представим компоненты Q, P, u, ε, σ, а также приращение температуры T в виде рядов Фурье:

$$P_r = \sum_{n=0}^{\infty} (P_{rc}^{[n]} \cos n\theta + P_{rs}^{[n]} \sin n\theta) \ (r \rightleftarrows z) \tag{1.3}$$

$$P_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (P_{\theta c}^{[n]} \sin n\theta + P_{\theta s}^{[n]} \cos n\theta) \ (P \rightleftarrows Q)$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} (T_c^{[n]} \cos n\theta + T_s^{[n]} \sin n\theta) \tag{1.4}$$

$$u_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} u_\alpha^{[n]} \ (\alpha = r, \theta, z); \ \varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{[n]} \ (\varepsilon \rightleftarrows \sigma) \tag{1.5}$$

$$u_r^{[n]} = v_r^{[n]}(r, z) \cos n\theta + w_r^{[n]}(r, z) \sin n\theta \ (r \rightleftarrows z)$$

$$u_\theta^{[n]} = v_\theta^{[n]}(r, z) \sin n\theta + w_\theta^{[n]}(r, z) \cos n\theta \tag{1.6}$$

а компоненты векторов $\sigma^{[n]}$ и $\varepsilon^{[n]}$ суть

$$\sigma_{rr}^{[n]} = \tau_{rr}^{[n]}(r, z) \cos n\theta + t_{rr}^{[n]}(r, z) \sin \theta n \ (rr \rightleftarrows \theta\theta \rightleftarrows zz \rightleftarrows rz) \tag{1.7}$$

$$\sigma_{\theta z}^{[n]} = \tau_{\theta z}^{[n]}(r, z) \sin n\theta + t_{\theta z}^{[n]}(r, z) \cos n\theta \ (\theta z \rightleftarrows r\theta) \ (\sigma \to \varepsilon \Rightarrow \tau \to e, t \to g)$$

Подставляя (1.3)—(1.7) в (1.2) и учитывая ортогональность тригонометрических функций, для каждого n в двумерной области $r, z \in \Omega$ сечения оболочки плоскостью $\theta = \theta^*$ $(\Gamma \leftrightarrow \Omega \cap S)$ получаем совокупность задач

$$\delta\left\{\iint_\Omega \left[\frac{1}{2}(\varepsilon_c^T B\varepsilon_c + \varepsilon_s^T B\varepsilon_s) - (T_c\beta^T\varepsilon_c + T_s\beta^T\varepsilon_s)\right] rdrdz - \right.$$

$$\left. - \iint_\Omega (Q_c^T v + Q_s^T w)\, rdrdz - \int_{\Gamma_p} (P_c v + P_s w)\, rd\gamma\right\} = 0 \tag{1.8}$$

$$\varepsilon_c = [e_{rr}, e_{\theta\theta}, e_{zz}, g_{\theta z}, e_{rz}, g_{r\theta}]^T \ (c \to s \Rightarrow e \rightleftarrows g)$$

$$P_c = [P_{rc}, P_{\theta c}, P_{zc}]^T \ (c \rightleftarrows s)(P \rightleftarrows Q), \ \ v = [v_r, v_\theta, v_z]^T \ (v \rightleftarrows w) \tag{1.9}$$

Здесь и ниже индекс n опускаем.

Наиболее существенное отличие ортотропной оболочки (у которой направления ортотропии для каждого слоя совпадают с криволинейными координатами α_1,

α_2, α_3) от анизотропной состоит в том, что ввиду $B_{45} = B_{56} = B_{ik} = 0$ ($i = 1, 2, 3$; $k = 4, 6$) и $\alpha_{\theta z} = \alpha_{r\theta} = \beta_{\theta z} = \beta_{r\theta} = 0$, из (1.1) следуют равенства $\tau = Be - T_c\beta$, $t = Bg - T_s\beta$, и задача (1.8) распадается на две эквивалентные

$$\delta\left[\iint_\Omega\left(\frac{1}{2}e^TBe - T_c\beta^Te\right)rdrdz - \iint_\Omega Q_c^Tvrdrdz - \int_{\Gamma_P}P_c^Tvrd\gamma\right] = 0$$

$$\delta\left[\iint_\Omega\left(\frac{1}{2}g^TBg - T_s\beta^Tg\right)rdrdz - \iint_\Omega Q_s^Twrdrdz - \int_{\Gamma_P}P_s^Twrd\gamma\right] = 0 \qquad (1.10)$$

В общем случае анизотропии компоненты τ и t связаны соотношениями (1.1) одновременно как с компонентами e, так и для g (например, $\tau_{rr} = B_{11}e_{rr} + B_{12}e_{\theta\theta} + B_{13}e_{zz} + B_{14}g_{\theta z} + B_{15}e_{rz} + B_{16}g_{r\theta} - T_c\beta_{rr}$), что приводит к связанности v_α и w_α ($\alpha = r, \theta, z$) и необходимости решения задачи (1.8) вдвое большей размерности, чем каждая из (1.10). Это, по-видимому, явилось основным фактором, сдерживающим до настоящего времени решение неосесимметричных задач в пространственной постановке с учетом анизотропии общего вида.

2. Сведение континуальной задачи к дискретной. Использование рекомендаций по обеспечению сходимости [14] и устойчивости [15] МКЭ позволяет получать на его основе достаточно надежные для анализа решения пространственной задачи теории анизотропной упругости слоистых оболочек. Здесь численное определение коэффициентов $v_\alpha(r, z)$ и $w_\alpha(r, z)$, $e_{\alpha\beta}(r, z)$ и $g_{\alpha\beta}(r, z)$, $t_{\alpha\beta}(r, z)$ и $\tau_{\alpha\beta}(r, z)$ в разложениях (1.5)—(1.7) для каждого n (в последующем, для краткости — перемещений, деформаций и напряжений), будем осуществлять с использованием МКЭ в форме метода перемещений с линейными локальными аппроксимациями v_α, w_α на треугольных конечных элементах (КЭ) Ω_e ($\Omega = \sum\Omega_e$ от $e = 1$ до Ne, Ne — общее число КЭ, индекс e означает принадлежность e-у элементу):

$$W_i^e(r, z) = \alpha_{3i-2}^e + \alpha_{3i-1}^er + \alpha_{3i}^ez\ (i = 1, \ldots, 6)\ r, z \in \Omega_e$$

$$W^e(r, z) = [v_r^e(r, z), w_\theta^e(r, z), v_z^e(r, z), w_r^e(r, z), v_\theta^e(r, z), w_z^e(r, z)]^T \qquad (2.1)$$

Коэффициенты α_k^e ($k = 1, \ldots, 18$) связаны линейным преобразованием [17] с компонентами вектора обобщенных узловых перемещений КЭ:

$$U^e = [v_r^i, w_\theta^i, v_z^i, v_r^j, \ldots, v_z^k, w_r^i, v_\theta^i, w_z^i, \ldots, w_z^k]^T,\ \dim U^e = 18\ (i, jk \in \Omega_e) \qquad (2.2)$$

Вводя глобальный вектор обобщенных перемещений

$$U = [v_r^1, w_\theta^1, v_z^1, w_r^1, v_\theta^1, w_z^1, v_r^2, \ldots, w_z^{Np}]^T,\ \dim U = 6Np \qquad (2.3)$$

(Np — общее число узлов дискретной модели), подставляя (2.1) с учетом (1.1), (1.6)—(1.9) и равенств

$$\iint_\Omega(\ldots)rdrdz = \sum_{e=1}^{Ne}\iint_{\Omega_e}(\ldots)rdrdz, \int_{\Gamma_p}(\ldots)rd\gamma = \sum_{e=1}^{Ne}\int_{\Gamma_p^e}(\ldots)dr\gamma\ (\Gamma_p^e \leftrightarrow \Omega_e \cap \Gamma_p)$$

в (1.10), и переходя в (1.10) от варьирования к дифференцированию по компонентам вектора U, получаем конечноэлементный эквивалент уравнений равновесия

$$K_LU = R_P + R_Q + R_T$$

$$[K_{Lij}] = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial U_i\partial U_j}\sum_{e=1}^{Ne}\iint_{\Omega_e}\{(\varepsilon_c^e)^TB\varepsilon_c^e + (\varepsilon_s^e)^TB\varepsilon_s^e\}rdrdz\right] \qquad (2.4)$$

$$\{R_{Pi}\} = \left\{\frac{\partial}{\partial U_i}\sum_{e=1}^{Ne}\int_{\Gamma_p^e}(P_c^Tv^e + P_S^Tw^e)rd\gamma\right\},\ \{R_{Qi}\} = \left\{\frac{\partial}{\partial U_i}\sum_{e=1}^{Ne}\iint_{\Omega_e}(Q_c^Tv^e + Q_s^Tw^e)rdrdz\right\}$$

$$\{R_{Ti}\} = \left\{\frac{\partial}{\partial U_i}\sum_{e=1}^{Ne}\iint_{\Omega_e}(T_c\beta^T\varepsilon_c + T_s\beta^T\varepsilon_s)rdrdz\right\} \qquad (2.5)$$

где $[K_{Lij}]$ — квадратная симметричная положительно определенная матрица жесткости, $\{R_{Pi}\}$ — векторы обобщенных сил от поверхностных, объемных нагрузок и температурных воздействий.

Структура матрицы (2.4) и векторов (2.5) отвечает (2.3). Однако практическое вычисление компонент матрицы жесткости удобнее производить поэлементным суммированием перестроенных и преобразованных к размерности $6Np\times6Np$ матриц K_L^e, полученных для каждого КЭ со структурой, отвечающей вектору узловых смещений элемента (2.2). Это позволяет при вычислении K_L^e использовать свойства симметрии всех типов

$$K_L^e = \begin{Vmatrix}A & B\\ B^T & A\end{Vmatrix},\ A = \begin{Vmatrix}C & C & C\\ C & C & C\\ C & C & C\end{Vmatrix},\ B = \begin{Vmatrix}D & D & D\\ D & D & D\\ D & D & D\end{Vmatrix}$$

$$C = \begin{Vmatrix}C_1 & C_4 & C_5\\ C_4 & C_2 & C_6\\ C_5 & C_6 & C_3\end{Vmatrix},\ D = \begin{Vmatrix}d_1 & d_4 & d_5\\ -d_4 & d_2 & d_6\\ -d_5 & -d_6 & d_3\end{Vmatrix}$$

Таким образом, для определения 171 компоненты симметричной матрицы ($\dim K_L^e = 18\times18$) достаточно получить лишь 12 соотношений $C_k = C_k(i, j)$, $d_k = d_k(i, j)$ ($k = 1, \ldots, 6$; $i, j = 1, 2, 3$).

Реализация предлагаемого подхода на ЭВМ осуществлена в рамках универсального алгоритма *NAAMS* и аналогична изложенному в [7]. Отметим, что соотношения для вычисления компонент матрицы K_L^e и векторов (2.5) получены в аналитической форме, что в рамках принятой аппроксимации (2.1) обеспечивает наибольшую точность численного решения (тестовые расчеты показали, что использование численного интегрирования приводит к ухудшению сходимости для отдельных задач в несколько раз).

3. Влияние анизотропии на напряженно-деформированное состояние перекрестно армированных оболочек. Свойства напряженно-деформированного состояния слоистых анизотропных (неортотропных) оболочек вращения при неосесимметричном нагружении ранее не исследовались (некоторые особенности напряженно-деформированного состояния, связанные с учетом анизотропии показаны в [23], где решение получено на основе теории оболочек типа Тимошенко). Здесь представлены результаты анализа, выполненного на основе расчета перекрестно армированной цилиндрической оболочки, жестко заделанной по торцам $z = 0$ и $z = L$ и нагруженной по внутренней поверхности давлением $p_{rc} = 10\cos n\theta$ МПа.

Геометрические размеры оболочки и механические характеристики однонаправленно армированных боропластиковых слоев приняты таким же, как в [6, 24], где исследовался эффект анизотропии при осесимметричном геометрически нелинейном деформировании. Учитывая ранее полученные результаты [6], рассмотрим два предельных случая. В первом — оболочка состоит из двух слоев равной толщины $H/2$, армированных под углами $\gamma^{(1)} = 30°$ и $\gamma^{(2)} = -30°$, и являющихся анизотропными с одной плоскостью упругой симметрии (в соотношениях (1.1) $B_{i4}^{(1)} = -B_{i4}^{(2)}$ ($i = 1, 2, 3$) $B_{56}^{(1)} = -B_{56}^{(2)}$, остальные 9 ненулевые компоненты матрицы B для обоих слоев попарно равны между собой). Во втором случае оболочка рассматривалась как макроскопически однородная и ортотропная, для чего принималось, что $B_{i4}^{(k)} = B_{56}^{(k)} = 0$ ($i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2$), как это следует из осреднения упругих постоянных по объему при большом числе армированных под углами $\pm30°$ слоев общей толщиной H. Заметим, что рассматриваемая упругая система по своей геометрии, закреплению и нагружению симметрична относительно центрального сечения $z = L/2$, а при рассмотрении ее как

n	v_r°	v_r^a	$\lvert w_r\rvert\cdot 10^2$	$\lvert v_\theta^\circ\rvert\cdot 10^2$	$\lvert v_\theta^a\rvert\cdot 10^2$	$\lvert w_\theta\rvert\cdot 10^2$	$\lvert v_z^\circ\rvert\cdot 10^2$	$\lvert v_z^a\rvert\cdot 10^2$	$\lvert w_z\rvert\cdot 10^2$
0	0,949	1,17	—	—	—	6,00	2,19	2,69	—
1	0,953	1,18	2,01	3,08	4,07	6,12	2,05	2,56	0,853
2	0,959	1,23	3,75	5,87	7,93	6,24	1,66	1,74	1,74
5	0,864	1,31	5,02	9,72	14,90	5,86	0,183	0,067	4,42
9	0,438	0,743	0,795	5,01	8,37	2,51	0,768	1,20	4,33
10	0,350	0,590	0,373	3,80	6,32	1,87	0,636	1,03	3,74
15	0,119	0,185	0,251	0,814	1,31	0,446	0,138	0,245	1,45

ортотропной, обладает полной материальной симметрией. Это позволяет установить свойства симметрии НДС для оболочек подобного типа.

Как следует из разложений (1.3)—(1.7) и вариационной формулировки (1.10), при нагружении ортотропной оболочки по закону (3.1), в ней возникают лишь перемещения v_α, напряжения $\tau_{\alpha\beta}$ и деформации $e_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = r, \theta, z$). Назовем их основными составляющими НДС, в то время, как w_α, $t_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$, обусловленные в данной задаче лишь наличием анизотропии,— дополнительными.

Расчеты оболочек были выполнены в диапазоне изменяемости нагрузки $0 \le n \le 15$. В таблице и на фигурах, отражающих результаты расчета, размерность линейных величин — мм, размерность напряжений — МПа.

В таблице сопоставлены максимальные абсолютные значения основных и дополнительных перемещений для обоих случаев рассмотрения. Если вклад анизотропии в НДС оценивать по влиянию на значения основных прогибов $v_r(H/2)$ и окружных перемещений $v_\theta(H/2)$, то наибольшим он является для $n = 9$. Действительно, в этом случае $v_r^a/v_r^\circ \approx v_\theta^a/v_\theta^0 \approx 1{,}67$ (здесь и ниже верхний индекс a соответствует анизотропной оболочке, индекс $^\circ$ — рассматриваемый, как ортотропная). Наименее же влияние анизотропии проявляется при осесимметричном нагружении ($n = 0$). Существенно, что дополнительные перемещения w_θ и w_r соизмеримы с основными v_θ и v_z, а в ряде случаев и превосходят последние.

Учитывая общий характер напряженно-деформированного состояния при всех n, дальнейший анализ произведем для случая $n = 9$.

Остановимся на общих свойствах напряженно-деформированного состояния перекрестно армированной оболочки. Для основных компонентов напряженно-деформированного состояния ортотропной и анизотропной оболочек характерны общие свойства симметрии относительно центрального сечения

$$v_r\left(\frac{L}{2}+z\right) = v_r\left(\frac{L}{2}-z\right)\ (r \rightleftarrows \theta);\ v_z\left(\frac{L}{2}+z\right) = -v_z\left(\frac{L}{2}-z\right)$$

$$\tau_{\alpha\alpha}\left(\frac{L}{2}+z\right) = \tau_{\alpha\alpha}\left(\frac{L}{2}-z\right)\ (\alpha = r, \theta, z);\ \tau_{r\theta}\left(\frac{L}{2}+z\right) = \tau_{r\theta}\left(\frac{L}{2}-z\right) \qquad (3.1)$$

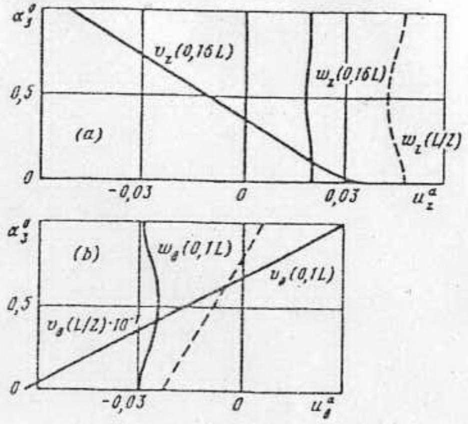
$$\tau_{\alpha z}\left(\frac{L}{2}+z\right) = -\tau_{\alpha z}\left(\frac{L}{2}-z\right)\ (\alpha = r, \theta;\ \tau \rightleftarrows e)$$

Для дополнительных же компонентов эти свойства противоположны

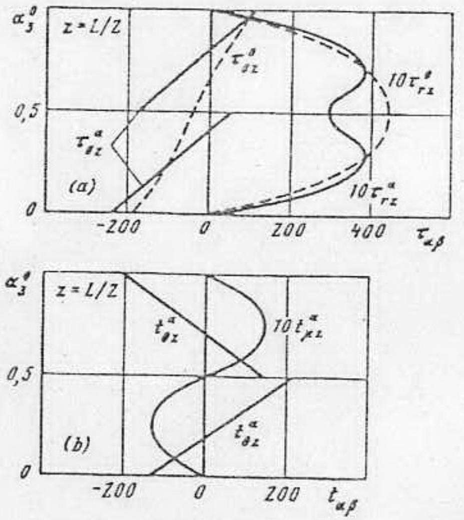
$$w_r\left(\frac{L}{2}+z\right) = -w_r\left(\frac{L}{2}-z\right)\ (r \rightleftarrows \theta);\ w_z\left(\frac{L}{2}+z\right) = w_z\left(\frac{L}{2}-z\right)$$

$$t_{\alpha\alpha}\left(\frac{L}{2}+z\right) = -t_{\alpha\alpha}\left(\frac{L}{2}-z\right)\ (\alpha = r, \theta, z);\ t_{r\theta}\left(\frac{L}{2}+z\right) = -t_{r\theta}\left(\frac{L}{2}-z\right)$$

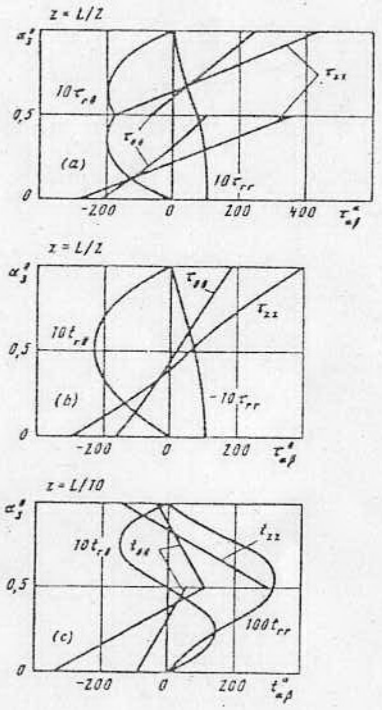
$$t_{\alpha z}\left(\frac{L}{2}+z\right) = t_{\alpha z}\left(\frac{L}{2}-z\right)\ (\alpha = r, \theta;\ t \rightleftarrows g) \qquad (3.2)$$



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

Представленные на фиг. 2 распределения основных и дополнительных перемещений срединной поверхности оболочки по длине хорошо иллюстрируют соотношения (3.1), (3.2) (для ортотропной оболочки перемещения имеют тот же характер, что и v_α^a, при меньших абсолютных значениях). Отметим, что для дополнительных окружных перемещений w_θ свойство нечетности относительно центрального сечения впервые было установлено, по-видимому, в [25] для случая осесимметричного нагружения.

Соотношения (3.2) и (3.3) имеют большое практическое значение, поскольку позволяют производить расчет оболочек с учетом симметрии, снижая вдвое затраты вычислительных ресурсов. Если ввести новую переменную $\xi = z - L/2$ (тем самым поместив начало координат в центральное сечение), то краевые условия, отвечающие условиям симметрии будут следующими ($\xi = 0$, $R \le r \le R + H$, где R — радиус внутренней поверхности оболочки):

$$v_z = 0,\ \tau_{rz} = 0,\ \tau_{\theta z} = 0;\ w_r = 0,\ w_\theta = 0,\ t_{zz} = 0 \qquad (3.3)$$

Для оболочки с криволинейным меридианом подобные условия удобнее формулировать в связанной системе координат α_1, α_2, α_3 (см. фиг. 1):

$$v_1 = 0,\ \tau_{13} = 0,\ \tau_{12} = 0;\ w_2 = 0,\ w_3 = 0,\ t_{11} = 0 \quad (3.4)$$

Заметим, что для ортотропной оболочки необходимы и достаточны лишь первые три условия в (3.3) или (3.4).

На фиг. 3 сопоставлены распределения основных и дополнительных тангенциальных перемещений по толщине $[\alpha_3^0 = (r - R)/H]$ для сечений по z, где они принимают максимальные значения (максимумы w_α и v_α в силу (1.6) отстают друг от друга по θ на величину $\pi/2n$). Будучи соизмеримыми по величине, основные и дополнительные перемещения изменяются по различным законам: если v_α — практически линейны по толщине (как и следовало ожидать для достаточно тонкой оболочки с отношением $R/H = 20$), то w_α распределены по толщине нелинейным образом.

На фиг. 4, 5 даны распределения по толщине всех компонент основных и дополнительных напряжений анизотропной и ортотропной оболочек в сечениях, где они принимают экстремальные значения (из рассмотрения исключены узкие зоны, непосредственно примыкающие к заделке, где упругое решение имеет локальные особенности). Поскольку близкие по величине $t_{\alpha\beta}$ и $\tau_{\alpha\beta}$ принимают максимальные значения в различных зонах, перекрестно армированные оболочки являются практически равнонапряженными по всему объему (расчеты по ортотропной модели не позволяют сделать такого вывода). Интересным является тот факт, что дополнительные напряжения $t_{\alpha\beta}$ (за исключением t_{rr}, имеющих порядок $\tau_{rr}/10$) в рассматриваемых сечениях являются практически самоуравновешенными $\int_R^{R+H} t_{\alpha\beta} dr \approx 0$. Из приведенных разультатов следует, что пренебрежение анизотропией вносит погрешность в расчетные значения основных напряжений порядка 25%.

Отметим, что представленный анализ напряженного состояния, в том числе и условия симметрии (3.3), (3.4) не могут быть распространены на случай температурного нагружения. Из совместного рассмотрения соотношений (1.3)—(1.7), (1.9) и (2.5) следует, что даже температурное поле $T = T_c(r, z)\cos n\theta$ (или $T = T_s(r, z)\sin n\theta$) эквивалентно по характеру порождаемого НДС анизотропной оболочки нагружению объемными силами с одновременным наличием cos и sin-составляющих.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pagano N. J.* Influence of shear coupling in cylindrical bending of anisotropic laminates // J. of Compos. Mater. 1970. V. 4. № 3. P. 330—343.
2. *Stalnaker D. O., Kennedy R. H., Ford J. L.* Interlaminar shear strain in two-ply balanced cord-rubber composite // Exp. Mech. 1980. V. 20. № 3. P. 87—94.
3. *Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Решение задач о напряженном состоянии анизотропных неоднородных цилиндров // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 8. С. 11—18.
4. *Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* К решению задач об упругом равновесии анизотропного неоднородного полого цилиндра // Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 4. С. 14—20.
5. *Patel H. P., Kennedy R. H.* Nonlinear finite element analysis for composite structures of axisymmetric geometry and loading // Comput. and Struct. 1982. V. 15. № 1. P. 79—84.
6. *Григолюк Э. И., Носатенко П. Я.* К эффекту анизотропии в перекрестно армированных оболочках // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Калинин. 1986. С. 120—129.
7. *Григолюк Э. И., Носатенко П. Я.* Пространственная геометрически нелинейная задача термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения // Механика композит. материалов. 1988. № 4. С. 684—690.
8. *Григолюк Э. И., Носатенко П. Я., Ширшов Ю. Ю.* Напряженно-деформированное состояние перекрестно армированного композита при свободном нагреве // Мех. композ. материалов. 1989. № 3. С. 549—551.
9. *Чепига В. Е.* Об асимптотической погрешности некоторых гипотез в теории слоистых оболочек // Теория и расчет элементов тонкостенных конструкций. М.; 1986. С. 118—125.
10. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев, 1985. 190 с.
11. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Мех. композ. материалов. 1988. № 2. С. 287—298.
12. *Григолюк Э. И., Носатенко П. Я.* О пространственном подходе к численному решению задач механики тонкостенных конструкций // Ж. вычислит. математ. и математ. физики. 1989. Т. 29. № 1. С. 151—153.
13. *Григолюк Э. И., Носатенко П. Я., Омельченко М. Н.* Об устойчивости конечноэлементного решения задач механики композитных конструкций // Изв. ВУЗов. Машиностроение. 1989. № 8. С. 3—6.
14. *Григолюк Э. И., Носатенко П. Я.* О численном обосновании существования и единственности решения геометрически нелинейной задачи теории упругости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289. № 4. С. 821—824.
15. *Wilson E. L.* Structural analysis of axisymmetric solids. // AIAA Journal. 1965. V. 3. № 12. P. 2269—2274.
16. *Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А.* Пространственно-армированные композиционные материалы. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
17. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498 с.
18. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
19. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
20. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
21. *Куликов Г. М.* Неосесимметричное нагружение предварительно напряженной многослойной армированной оболочки // Механика композит. материалов. 1990. № 2. С. 312—316.
22. *Куликов Г. М.* О влиянии анизотропии на напряженное состояние многослойных армированных оболочек // Прикл. механика. 1986. Т. 22, № 12. С. 66—72.
23. *Gulati S. T., Essenburg F.* Effects of anisotropy in axisymmetric cylindrical shells // Trans. ASME. 1967. V. E34. № 3. P. 659—666.

Москва

Поступила в редакцию
20.XI.1993